

Министерство науки и высшего образования РФ  
ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный университет»  
Факультет математики, информационных и авиационных технологий

Иванцов А.М.

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ  
СТУДЕНТОВ  
ПО ДИСЦИПЛИНЕ**

**«Нелинейные динамические системы»**

для студентов специальностей 10.05.01 «Компьютерная безопасность»  
и 10.05.03 «Информационная безопасность автоматизированных систем» очной формы обучения

Ульяновск, 2022

Методические указания для самостоятельной работы студентов по дисциплине «Нелинейные динамические системы» для студентов специальностей 10.05.01 «Компьютерная безопасность» и 10.05.03 «Информационная безопасность автоматизированных систем» очной формы обучения / составитель: А.М. Иванцов. - Ульяновск: УлГУ, 2022. Настоящие методические указания предназначены для студентов специалитета по специальностям 10.05.01 и 10.05.03 очной формы обучения. В работе приведены литература по дисциплине, основные темы курса и вопросы в рамках каждой темы, рекомендации по изучению теоретического материала, контрольные вопросы для самоконтроля и задания для самостоятельной работы. Методические указания будут полезны студентам при подготовке к лекциям, семинарам и к зачету по данной дисциплине.

Методические указания рекомендованы к введению в образовательный процесс решением Ученого Совета ФМИиАТ УлГУ (протокол 3/22 от 19 марта 2022г.)

## Содержание

<b>1. ЛИТЕРАТУРА ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ .....</b>	<b>4</b>
<b>2. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ .....</b>	<b>5</b>
<b>Тема 1. Дифференциальное уравнение первого порядка.....</b>	<b>5</b>
<b>Тема 2. Нормальные системы дифференциальных уравнений.....</b>	<b>7</b>
<b>Тема 3. Линейные системы уравнений.....</b>	<b>9</b>
<b>Тема 4. Дифференциальные уравнения n-го порядка.....</b>	<b>10</b>

## 1. ЛИТЕРАТУРА ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

1. Тихонов А.Н., Дифференциальные уравнения [Электронный ресурс]: Учеб. для вузов / Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А. Г. - 4-е изд., - М. : ФИЗМАТЛИТ, 2002. - 256 с. (Курс высшей математики и математической физики. Вып. 6) - ISBN 978-5-9221-0277-3 - Режим доступа: <http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785922102773.html>
2. 2.1. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления : учебник для физ. и мех.-мат. спец. вузов. Т. 1 : / Фихтенгольц Григорий Михайлович. - 8-е изд. - Москва : Физматлит, 2006.  
2.2. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления : учебник для физ. и мех.-матем. спец. вузов. Т. 2 : / Фихтенгольц Григорий Михайлович. - 8-е изд. - Москва : Физматлит : Лаборатория Знаний, 2003.  
2.3 Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления : учебник для физ. и мех.-мат. спец. вузов. Т. 3 : / Фихтенгольц Григорий Михайлович. - 8-е изд. - Москва : Физматлит, 2005.
3. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. 5-е издание.. М., Лань, 2007. 832 с.
4. Филиппов, А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям : учеб. пособие для вузов / Филиппов Алексей Федорович. - 7-е изд., стер. - Москва : Наука, 1992
5. Веденяпин А.Д., Практикум. Дифференциальные уравнения. В 2 ч. Часть 1. Дифференциальные уравнения первого порядка и приводящиеся к ним [Электронный ресурс] / Веденяпин А.Д., Поливенко В.К. - М. : ФИЗМАТЛИТ, 2008. - 160 с. - ISBN 978-5-9221-1007-5 - Режим доступа: <http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785922110075.html>
6. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. 6-е издание. М., Лань, 2007. 576 с.
7. Муратова, Т. В. Дифференциальные уравнения : учебник и практикум для академического бакалавриата / Т. В. Муратова. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 435 с. — (Бакалавр. Академический курс). — ISBN 978-5-534-01456-3. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: <https://www.biblio-online.ru/bcode/432105>
8. Пантелеев А.В., Обыкновенные дифференциальные уравнения. Практический курс [Электронный ресурс]: учеб. пособие с мультимедиа сопровождением / А.В. Пантелеев, А.С. Якимова, К.А. Рыбаков - М. : Логос, 2017. - 384 с. - ISBN 978-5-98704-465-0 - Режим доступа: <http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785987044650.html>
9. Андреев, А. С. Дифференциальные уравнения : учебно-метод. пособие . Ч. 1 : / А. С. Андреев, О. Д. Юрьева. - Ульяновск : УлГУ, 2007. - URL^ <ftp://10.2.96.134/Text/andreev.pdf>
10. Юрьева, О. Д. Обыкновенные дифференциальные уравнения и системы : учеб.-метод. пособие и типовые расчеты / О. Д. Юрьева, И. А. Перцева, Н. О. Седова ; УлГУ, ФМИиАТ. - Ульяновск : УлГУ, 2016.- URL^ <ftp://10.2.96.134/Text/Yrzeva2016.pdf>

## 2. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

### Тема 1. Дифференциальное уравнение первого порядка.

#### П.1 Интегральные кривые.

С темой можно ознакомиться в следующих источниках:

1. Тихонов А.Н., Дифференциальные уравнения [Электронный ресурс]: Учеб. для вузов / Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А. Г. - 4-е изд., - М. : ФИЗМАТЛИТ, 2002. - 256 с. (Курс высшей математики и математической физики. Вып. 6) - ISBN 978-5-9221-0277-3 - Режим доступа: <http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785922102773.html> : чтение теории: С.7-10, решение задач: С. 12-22.
2. Филиппов, А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям : учеб. пособие для вузов / Филиппов Алексей Федорович. - 7-е изд., стер. - Москва : Наука, 1992: чтение теории: С. 1-7, решение задач: С.7-9.

#### П.2 Задача Коши.

С темой можно ознакомиться в следующих источниках:

1. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. 5-е издание.. М., Лань, 2007. 832 с.: чтение теории: С.25-26, решение задач: С. 27-28.
2. Муратова, Т. В. Дифференциальные уравнения : учебник и практикум для академического бакалавриата / Т. В. Муратова. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 435 с. — (Бакалавр. Академический курс). — ISBN 978-5-534-01456-3. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: <https://www.biblio-online.ru/bcode/432105>: чтение теории: С. 16-19, решение задач: С.19-21.

#### П.3 Частное и общее решения.

С темой можно ознакомиться в следующих источниках:

1. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. 5-е издание.. М., Лань, 2007. 832 с.: чтение теории: С.28-35, решение задач: С. 32-33.
2. Веденяпин А.Д., Практикум. Дифференциальные уравнения. В 2 ч. Часть 1. Дифференциальные уравнения первого порядка и приводящиеся к ним [Электронный ресурс] / Веденяпин А.Д., Поливенко В.К. - М. : ФИЗМАТЛИТ, 2008. - 160 с. - ISBN 978-5-9221-1007-5 - Режим доступа: <http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785922110075.html>: чтение теории: С.10-17, решение задач: С. 7-9.

#### П.4 Методы решения простейших дифференциальных уравнений первого порядка.

С темой можно ознакомиться в следующих источниках:

1. Тихонов А.Н., Дифференциальные уравнения [Электронный ресурс]: Учеб. для вузов / Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А. Г. - 4-е изд., - М. : ФИЗМАТЛИТ, 2002. - 256 с. (Курс высшей математики и математической физики. Вып. 6) - ISBN 978-5-9221-0277-3 - Режим доступа: <http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785922102773.html> : чтение теории: С.23-31.
2. Филиппов, А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям : учеб. пособие для вузов / Филиппов Алексей Федорович. - 7-е изд., стер. - Москва : Наука, 1992: чтение теории: С. 17-18, 20-21, 25-26, решение задач: С.18-19, 22-24, 26-29.

#### П.5 Дифференциальные уравнения первого порядка, не разрешимые относительно производной.

С темой можно ознакомиться в следующих источниках:

1. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. 5-е издание.. М., Лань, 2007. 832 с.: чтение теории: С.113-118, 125-126,129-130. решение задач: С. 118-122, 126-127,130.
2. Филиппов, А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям : учеб. пособие для вузов / Филиппов Алексей Федорович. - 7-е изд., стер. - Москва : Наука, 1992: чтение теории: С. 34-37, решение задач: С.37-38.

## Контрольные вопросы по теме 1

1. Запишите дифференциальное уравнение 1-го порядка в общем виде и виде, разрешенном относительно производной.
2. Дайте определение функции, удовлетворяющей условию Липшица локально.
3. Дайте определение решению дифференциального уравнения 1-го порядка.
4. Сформулируйте достаточные условия существования и единственности решения дифференциального уравнения 1-го порядка.
5. Дайте определение интегральной кривой.
6. Запишите общий вид уравнения, не разрешенного относительно производной и опишите алгоритм поиска его решения.
7. Что такое поле направлений дифференциального уравнения 1-го порядка? Как его построить?
8. Запишите уравнение Клеро и вид его решения.
9. Что называется решением задачи Коши для дифференциального уравнения 1-го порядка?
10. Дайте определение однородного дифференциального уравнения 1-го порядка и замену для его решения.
11. Запишите вид и алгоритм решения дифференциального уравнения с разделяющимися переменными.
12. Что называется общим решением дифференциального уравнения 1-го порядка.
13. Запишите общий вид уравнения Бернулли и замену для его решения.
14. Запишите условия Липшица.
15. Достаточные условия существования и единственности решения дифференциального уравнения 1-го порядка.
16. Что такое поле направлений дифференциального уравнения 1-го порядка? Как его построить?
17. Приближения Пикара и отрезки Пеано.
18. Теорема о существовании и единственности решения дифференциального уравнения 1-го порядка.
19. Запишите общий вид уравнения в полных дифференциалах и дайте алгоритм отыскания его решения.
20. Какой вид имеет уравнение Лагранжа? Как найти его решение?

## Задачи для самостоятельной работы по теме 1

1. С помощью изоклин начертить решения уравнений
$$y' = y - x^2. \quad 2(y + y') = x + 3.$$
$$y' = \frac{x^2 + y^2}{2} - 1. \quad (y^2 + 1)y' = y - x.$$
2. Найти решения дифференциальных уравнений, удовлетворяющие начальным условиям
$$(x + 2y)y' = 1; \quad y(0) = -1. \quad y' = 3\sqrt[3]{y^2}; \quad y(2) = 0.$$
$$(x^2 - 1)y' + 2xy^2 = 0; \quad y(0) = 1. \quad xy' + y = y^2; \quad y(1) = 0,5.$$
3. Решить однородные уравнения
$$(x + 2y) dx - x dy = 0. \quad xy' = y \cos \ln \frac{y}{x}.$$
$$(x - y) dx + (x + y) dy = 0. \quad (y + \sqrt{xy}) dx = x dy.$$
4. Решить линейные уравнения первого порядка
$$y' + y \operatorname{tg} x = \sec x. \quad xy' + 2y + x^5 y^3 e^x = 0.$$
$$(xy + e^x) dx - x dy = 0. \quad 2y' - \frac{x}{y} = \frac{xy}{x^2 - 1}.$$

5. Решить уравнения Рикатти

$$3y' + y^2 + \frac{2}{x^2} = 0.$$

$$y' + 2ye^x - y^2 = e^{2x} + e^x.$$

6. Решить уравнения в полных дифференциалах

$$\frac{3x^2 + y^2}{y^2} dx - \frac{2x^3 + 5y}{y^3} dy = 0.$$

$$\left( \frac{x}{\sin y} + 2 \right) dx + \frac{(x^2 + 1) \cos y}{\cos 2y - 1} dy = 0.$$

7. Найти все решения данных уравнений, выделить особые решения

$$y'^2 - 4y^3 = 0.$$

$$y'^2 = 4y^3(1 - y).$$

$$xy'^2 = y.$$

$$yy'^3 + x = 1.$$

## Тема 2. Нормальные системы дифференциальных уравнений.

### II.1 Устойчивость.

С темой можно ознакомиться в следующих источниках:

1. Тихонов А.Н., Дифференциальные уравнения [Электронный ресурс]: Учеб. для вузов / Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А. Г. - 4-е изд., - М. : ФИЗМАТЛИТ, 2002. - 256 с. (Курс высшей математики и математической физики. Вып. 6) - ISBN 978-5-9221-0277-3 - Режим доступа: <http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785922102773.html> : чтение теории: С.128-145
2. Филиппов, А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям : учеб. пособие для вузов / Филиппов Алексей Федорович. - 7-е изд., стер. - Москва : Наука, 1992: чтение теории: С. 87-91, решение задач: С.92-97.

### II.2 Линейные уравнения в частных производных первого порядка.

С темой можно ознакомиться в следующих источниках:

1. Тихонов А.Н., Дифференциальные уравнения [Электронный ресурс]: Учеб. для вузов / Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А. Г. - 4-е изд., - М. : ФИЗМАТЛИТ, 2002. - 256 с. (Курс высшей математики и математической физики. Вып. 6) - ISBN 978-5-9221-0277-3 - Режим доступа: <http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785922102773.html> : чтение теории: С.209-227
2. Филиппов, А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям : учеб. пособие для вузов / Филиппов Алексей Федорович. - 7-е изд., стер. - Москва : Наука, 1992: решение задач: С.150-151.

### II.3 Системы дифференциальных уравнений.

С темой можно ознакомиться в следующих источниках:

1. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. 5-е издание.. М., Лань, 2007. 832 с.: чтение теории: С.180-184, решение задач: С. 184-185.
2. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. 6-е издание. М.,Лань, 2007. 576 с. : чтение теории: С.54-65, решение задач: С. 534-535.

### II.4 Приведение к нормальному виду. Задача Коши.

С темой можно ознакомиться в следующих источниках:

1. Тихонов А.Н., Дифференциальные уравнения [Электронный ресурс]: Учеб. для вузов / Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А. Г. - 4-е изд., - М. : ФИЗМАТЛИТ, 2002. - 256 с. (Курс высшей математики и математической физики. Вып. 6) - ISBN 978-5-9221-0277-3 - Режим доступа: <http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785922102773.html> : чтение теории: С.88--101, решение задач: С. 534-535.
2. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. 5-е издание.. М., Лань, 2007. 832 с.: чтение теории: С.180-203.
3. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. 6-е издание. М.,Лань, 2007. 576 с. : чтение теории: С.54-65.

## Контрольные вопросы по теме 2

1. Сформулируйте задачу устойчивости
2. Как исследовать дифференциальное уравнение на устойчивость по первому приближению?
3. Что значит, что решение дифференциального уравнения устойчиво по Ляпунову?
4. Какое уравнение называют дифференциальным уравнением в частных производных первого порядка?
5. Какое уравнение называют квазилинейным дифференциальным уравнением в частных производных?
6. Укажите метод решения однородного линейного уравнения в частных производных первого порядка.
7. Что называется характеристиками линейного уравнения?
8. Сформулируйте правило решения задачи Коши для однородного линейного уравнения в частных производных первого порядка.
9. Дайте геометрический смысл системы дифференциальных уравнений.
10. Сформулируйте теорему о существовании и единственности решения.
11. Опишите связь системы дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных.
12. Дайте алгоритм редукции системы с помощью дифференцирования и исключения.
13. Сформулируйте теоремы об оценках.
14. Понятие о нормальной системе. Линейная система дифференциальных уравнений
15. Дайте механическое истолкование нормальной системы
16. Сформулируете задачу Коши для системы в нормальной форме.
17. Опишите процесс понижения порядка системы при помощи первых интегралов.

## Задачи для самостоятельной работы по теме 2

1. Найдите положения равновесия и исследуйте их на устойчивость

$$\dot{x} = -x^2.$$

$$\dot{x} = \sin x - x.$$

$$\dot{x} = -x \sin^2 x.$$

$$\dot{x} = -x \sin^2 t.$$

2. Определите тип особой точки и нарисуйте траектории системы

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 3y, \\ \dot{y} = 5y - x. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = x - 5y, \\ \dot{y} = 5x - 5y. \end{cases}$$

3. С помощью теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению исследуйте на устойчивость нулевое решение

$$\begin{cases} \dot{x} = e^{x+2y} - \cos 3x, \\ \dot{y} = \sqrt{4 + 8x} - 2e^y. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \ln(3e^y - 2\cos x), \\ \dot{y} = 2e^x - \sqrt[3]{8 + 12y}. \end{cases}$$

4. Решите уравнения в частных производных

$$y \frac{\partial z}{\partial x} + xz \frac{\partial z}{\partial y} = yz, \quad z = -y^2 \text{ при } x = 0.$$

$$xy \frac{\partial z}{\partial x} + xz \frac{\partial z}{\partial y} = yz, \quad z = 1 + y^2 \text{ при } x = 1.$$

$$xz \frac{\partial z}{\partial x} + yz \frac{\partial z}{\partial y} = x^3 + y, \quad z = 4y^3 \text{ при } x = 3y^2.$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} + (z - x^2) \frac{\partial z}{\partial y} = 2x, \quad z = x^2 + x \text{ при } y = 2x$$



5. Решите системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = -5y, \\ \dot{y} = 2x + 2y. \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x} = z - x - y, \\ \dot{y} = x - y - z, \\ \dot{z} = -y; \end{cases} \quad \begin{matrix} \lambda_1 = 0, \\ \lambda_{2,3} = -1. \end{matrix}$$

6. Решите системы, не приведенные к нормальному виду

$$\begin{cases} \ddot{x} = 2y, \\ \ddot{y} = -2x. \end{cases} \quad \begin{cases} \ddot{x} - 2\ddot{y} + \dot{y} + x - 3y = 0, \\ 4\ddot{y} - 2\ddot{x} - \dot{x} - 2x + 5y = 0. \end{cases}$$

### Тема 3. Линейные системы уравнений.

#### П.1 Фундаментальные системы решений.

С темой можно ознакомиться в следующих источниках:

1. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. 6-е издание. М., Лань, 2007. 576 с. : чтение теории: С.72-78.
2. Тихонов А.Н., Дифференциальные уравнения [Электронный ресурс]: Учеб. для вузов / Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А. Г. - 4-е изд., - М. : ФИЗМАТЛИТ, 2002. - 256 с. (Курс высшей математики и математической физики. Вып. 6) - ISBN 978-5-9221-0277-3 - Режим доступа: <http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785922102773.html> : чтение теории: С.88-96

#### П.2 Построение общего решения.

С темой можно ознакомиться в следующих источниках:

1. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. 5-е издание.. М., Лань, 2007. 832 с.: чтение теории: С.292-299., решение задач: С.299-301
2. Андреев, А. С. Дифференциальные уравнения : учебно-метод. пособие . Ч. 1 : / А. С. Андреев, О. Д. Юрьева. - Ульяновск : УлГУ, 2007. - URL^ <ftp://10.2.96.134/Text/andreev.pdf>, 1992: чтение теории: С. 68-76, решение задач: С.92.

#### П.3 Линейные системы с постоянными коэффициентами.

С темой можно ознакомиться в следующих источниках:

1. Филиппов, А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям : учеб. пособие для вузов / Филиппов Алексей Федорович. - 7-е изд., стер. - Москва : Наука, 1992: чтение теории: С. 74-80, решение задач: С.81-82.
2. Андреев, А. С. Дифференциальные уравнения : учебно-метод. пособие . Ч. 1 : / А. С. Андреев, О. Д. Юрьева. - Ульяновск : УлГУ, 2007. - URL^ <ftp://10.2.96.134/Text/andreev.pdf>, 1992: чтение теории: С. 80-83, решение задач: С.92.

#### П.4 Структура фундаментальной матрицы.

С темой можно ознакомиться в следующих источниках:

1. Тихонов А.Н., Дифференциальные уравнения [Электронный ресурс]: Учеб. для вузов / Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А. Г. - 4-е изд., - М. : ФИЗМАТЛИТ, 2002. - 256 с. (Курс высшей математики и математической физики. Вып. 6) - ISBN 978-5-9221-0277-3 - Режим доступа: <http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785922102773.html> : чтение теории: С.128-145
2. Филиппов, А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям : учеб. пособие для вузов / Филиппов Алексей Федорович. - 7-е изд., стер. - Москва : Наука, 1992: чтение теории: С. 80-81, решение задач: С.86-87.

### Контрольные вопросы по теме 3

1. Какая система называется линейной системой дифференциальных уравнений?
2. Дайте определение однородной и неоднородной системы дифференциальных уравнений.
3. Какими свойствами обладают решения систем дифференциальных уравнений.
4. Что такое фундаментальная система решений?
5. Что такое определитель Вронского?
6. Каковы структура общего решения неоднородной системы?
7. Запишите формулу Лиувилля-Остроградского.
8. Какие методы используются для отыскания частного решения неоднородной системы?
9. Как составить характеристическое уравнение для системы с постоянными коэффициентами?
10. Что такое собственные значения и собственные вектора?
11. Как вычислить геометрическую и алгебраическую кратность корней?
12. Что такое фундаментальная матрица?
13. Какими свойствами обладает фундаментальная матрица?

### Задачи для самостоятельной работы по теме 3

1. Решите линейные неоднородные системы

$$\begin{cases} \dot{x} = y + 2e^t, \\ \dot{y} = x + t^2. \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x} = 2y - x + 1, \\ \dot{y} = 3y - 2x. \end{cases}$$

2. Решите системы уравнений с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = 4y - x. \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = 3y - 2x. \end{cases}$$
$$\begin{cases} \dot{x} = 2y - 3x, \\ \dot{y} = y - 2x. \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x} + x + 5y = 0, \\ \dot{y} - x - y = 0. \end{cases}$$

3. Найдите показательную функцию матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}. \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Какое условие достаточно наложить на собственные значения матрицы  $A$ , чтобы система уравнений имела периодическое решение при всякой правой функции?

### Тема 4. Дифференциальные уравнения $n$ -го порядка.

#### П.1 Однородное линейное уравнение.

С темой можно ознакомиться в следующих источниках:

1. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. 5-е издание.. М., Лань, 2007. 832 с.: чтение теории: С.363-387., решение задач: С.387-389
2. Филиппов, А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям : учеб. пособие для вузов / Филиппов Алексей Федорович. - 7-е изд., стер. - Москва : Наука, 1992: чтение теории: С. 62-63, решение задач: С.63-65.

#### П.2 Неоднородное линейное уравнение. Метод вариации произвольных постоянных

С темой можно ознакомиться в следующих источниках:

1. Андреев, А. С. Дифференциальные уравнения : учебно-метод. пособие . Ч. 1 : / А. С. Андреев,

О. Д. Юрьева. - Ульяновск : УлГУ, 2007. - URL^ <ftp://10.2.96.134/Text/andreev.pdf>, 1992: чтение теории: С. 65-66,68-70 решение задач: С.91.

2 .Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. 5-е издание.. М., Лань, 2007. 832 с.: чтение теории: С.389-394.

**П.3** Линейное уравнение с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение. Нахождение общего решения.

С темой можно ознакомиться в следующих источниках:

3 Филиппов, А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям : учеб. пособие для вузов / Филиппов Алексей Федорович. - 7-е изд., стер. - Москва : Наука, 1992: чтение теории: С. 49-53, решение задач: С.55-57.

4 Андреев, А. С. Дифференциальные уравнения : учебно-метод. пособие . Ч. 1 : / А. С. Андреев, О. Д. Юрьева. - Ульяновск : УлГУ, 2007. - URL^ <ftp://10.2.96.134/Text/andreev.pdf>, 1992: чтение теории: С. 70-80, решение задач: С.90-91.

**П.4** Решение линейных уравнений в частных производных первого порядка.

С темой можно ознакомиться в следующих источниках:

1. Филиппов, А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям : учеб. пособие для вузов / Филиппов Алексей Федорович. - 7-е изд., стер. - Москва : Наука, 1992: чтение теории: С. 122-125, решение задач: С.125-127.

2. Тихонов А.Н., Дифференциальные уравнения [Электронный ресурс]: Учеб. для вузов / Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А. Г. - 4-е изд., - М. : ФИЗМАТЛИТ, 2002. - 256 с. (Курс высшей математики и математической физики. Вып. 6) - ISBN 978-5-9221-0277-3 - Режим доступа: <http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785922102773.html> : чтение теории: С.209-218

#### Задачи для самостоятельной работы по теме 4

1. Найти общее решение, зная частное

$$\begin{aligned} xy'' - (2x + 1)y' + (x + 1)y &= 0, & y'' + 4xy' + (4x^2 + 2)y &= 0; y_1 = e^{ax^2}. \\ xy'' + 2y' - xy &= 0; y_1 = \frac{e^x}{x}, & xy'' - (2x + 1)y' + 2y &= 0. \end{aligned}$$

2. Зная два частных решения линейного неоднородного уравнения второго порядка, найти его общее решение

$$(x^2 - 1)y'' + 4xy' + 2y = 6x; \quad y_1 = x, \quad y_2 = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}.$$

3. Решить уравнение Эйлера

$$x^2 y'' - xy' + y = 8x^3, \quad (x - 2)^2 y'' - 3(x - 2)y' + 4y = x.$$

4. Решить уравнение способом вариации постоянных

$$y'' + 2y' + y = 3e^{-x} \sqrt{x + 1}, \quad y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}.$$

5. Написать общее решение уравнений без поиска неопределённых коэффициентов частного решения

$$\begin{aligned} y''' + y' &= \sin x + x \cos x, & y'' - 2y' + 2y &= e^x + x \cos x. \\ y''' - 2y'' + 4y' - 8y &= e^{2x} \sin 2x + 2x^2, & y'' + 6y' + 10y &= 3xe^{-3x} - 2e^{3x} \cos x. \end{aligned}$$

6. Найти общее решение

$$\begin{aligned} 2x \frac{\partial z}{\partial x} + (y - x) \frac{\partial z}{\partial y} - x^2 &= 0, & 2y^4 \frac{\partial z}{\partial x} - xy \frac{\partial z}{\partial y} &= x\sqrt{z^2 + 1}. \\ xy \frac{\partial z}{\partial x} - x^2 \frac{\partial z}{\partial y} &= yz, & x^2 z \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 z \frac{\partial z}{\partial y} &= x + y. \end{aligned}$$

7. Найти поверхность, удовлетворяющую данному уравнению решение

$$yz \frac{\partial z}{\partial x} + xz \frac{\partial z}{\partial y} = xy; \quad x = a, \quad y^2 + z^2 = a^2, \quad y^2 \frac{\partial z}{\partial x} + xy \frac{\partial z}{\partial y} = x; \quad x = 0, \quad z = y^2.$$

